

旋转液体综合实验设计

陈红雨

(浙江大学物理实验教学中心, 浙江 杭州 310027)

摘要:提出了一种根据旋转液体特性用光学方法测量重力加速度和液体黏度的综合实验设计方案, 该实验已作为开放、设计性实验内容在教学中应用。

关键词:旋转液体; 重力加速度; 液体黏度; 综合实验

中图分类号: O 4-34 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0712(2007)01-0029-05

综合性物理实验由于在内容上体现了物理学的多个概念和理论, 对于拓宽学生的思路 and 眼界, 培养学生的综合素质能力能起到很大的作用. 为了满足实验教学的需要, 笔者研制了一套利用旋转液体特性, 用光学方法测量重力加速度和液体黏度的综合实验装置. 实验的设计原理综合了流体力学、几何光学、物理光学等多方面的知识, 一台仪器多种用途, 不仅可以激发学生对物理实验的兴趣, 而且组装式结构增加了实验动手的过程, 对实验教学非常适用.

旋转液体综合实验首先利用旋转的液体表面形成的抛物面和抛物面的参数与重力加速度之间的关系, 将该抛物面作为光学元件, 用入射光和反射光测量重力加速度, 并且可以研究凹面镜焦距和凹面镜成像与转速的变化关系.

实验还根据牛顿流体力学的原理, 分析各流层之间的运动, 通过测量置于液体中垂线上的圆柱体在系统旋转稳定时, 力矩平衡下所转过的角度来间接测量液体的黏度.

1 测量原理

1.1 旋转液体抛物面公式推导

在转动参考系中看, 这是一个静力学平衡问题. 液面的液体体积元除受外力外还受邻近其他液体的作用. 因为液体在液面切向没有移动, 因此液体所受的总外力应垂直于液面, 才能和液体内部的作用力平衡, 如图 1 所示. 容器不旋转时, 液面体积元所受外力只有重力, 铅直向下, 因此液面是水平面. 圆柱形容器旋转时, 除重力外, 还受到惯性离心力, 并且离转轴越远惯性离心力越大. 它们的合力偏离铅直

方向, 越靠近容器边缘偏离越大. 液面要垂直于这个合力, 因此呈中心下陷的抛物面形状.

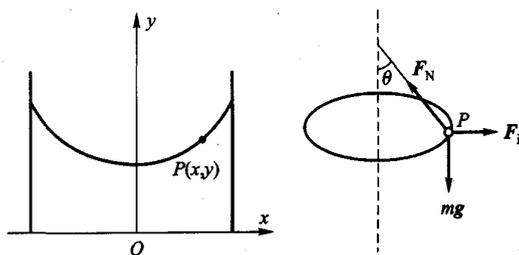


图 1 实验原理图

定量计算时, 选取圆柱形容器旋转的参考系, 这是一个转动的非惯性参考系. 液体相对参考系静止. 任选一小块液体 P, 其受力如图 1. F_i 为沿径向向外的惯性离心力, mg 为重力, F_N 为周围液体对这一小块液体的作用力的合力, 由对称性可知, F_N 必然垂直于液体表面. 在与容器固连的坐标系 $O-xyz$ (Oy 轴沿容器对称轴, Oxy 平面在对称面上) 中, 以小块液体为研究对象, 应有以下方程:

$$F_N \cos \theta - mg = 0 \quad (1)$$

$$F_N \sin \theta - F_i = 0 \quad (2)$$

$$F_i = m\omega^2 x \quad (3)$$

ω 是圆柱形容器的角速度大小.

根据式(1)、(2)、(3)可知

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g} \quad (4)$$

式(4)的解为

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + y_0 \quad (5)$$

y_0 为 $x=0$ 处的 y 值. 此为抛物线方程, 可见液面为旋转抛物面.

1.2 用旋转液体测量重力加速度 g

在实验系统中, 一个盛有液体、半径为 R 的圆柱形容器绕该圆柱体的对称轴以角速度 ω 匀速稳定转动时, 液体的表面形成抛物面, 如图 2.

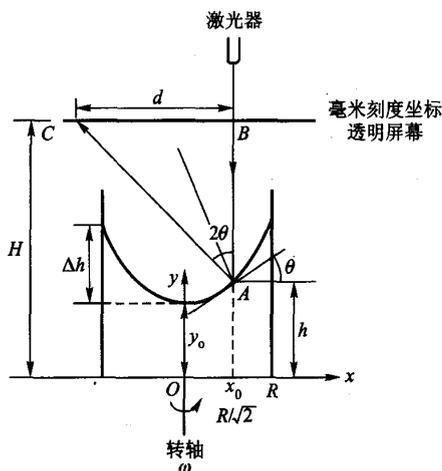


图 2 实验示意图

设液体未旋转时液面高度为 h , 液体的体积为

$$V = \pi R^2 h \quad (6)$$

因液体旋转前后体积保持不变, 旋转时液体体积可表示为

$$V = \int_0^R y(2\pi x) dx = 2\pi \int_0^R \left(\frac{\omega^2 x^2}{2g} + y_0 \right) x dx \quad (7)$$

由式(6)、(7)得

$$y_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (8)$$

联立式(5)、(8)可知, 当 $x = x_0 = R/\sqrt{2}$ 时, $y(x_0) = h$, 即液面在 x_0 处的高度是恒定值.

根据上述推导, 可得测量重力加速度的 3 种方法.

1) 方法一

如图 2 所示, 设旋转液面最高与最低处的高度差为 Δh , 点 $(R, y_0 + \Delta h)$ (液面与容器壁相交处) 在式(5)的抛物线上, 有

$$y_0 + \Delta h = \frac{\omega^2 R^2}{2g} + y_0 \quad (9)$$

由此可得出液面高度差与转速的关系式

$$\Delta h = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad (10)$$

根据上式, 可通过容器转速和液面边缘上升高度的函数关系, 计算重力加速度.

这个方法的缺点是液面最高处与最低处之间的差 Δh 测量精度不高.

2) 方法二

如图 2 所示, 激光束平行转轴向入射, 经过 BC 透明屏幕打在 $x_0 = R/\sqrt{2}$ 的液面 A 点上, 反射光点为 C, 设 A 处液面切线与 x 方向的夹角为 θ , 则 $\angle BAC = 2\theta$, 测出透明屏幕至圆桶底部的距离 H 、液面静止时高度 h , 以及两光点 BC 间距离 d , 则 $\tan 2\theta = \frac{d}{H-h}$, 由此可求出 $\tan \theta$ 值.

因为 $\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$, 在 $x_0 = R/\sqrt{2}$ 处有

$$\tan \theta = \frac{\omega^2 R}{\sqrt{2}g} \quad (11)$$

根据式(11)做 $\tan \theta - \omega^2$ 曲线, 由斜率可求出 g .

这一方法中各个所需参数的测量都是易于实现的.

3) 方法三

旋转液体表面形成的抛物面可看作一个凹面镜, 符合光学成像系统的规律, 若光线平行于曲面对称轴入射, 反射光将全部会聚于抛物面的焦点, 可用过旋转中心的垂直屏幕测得.

根据抛物线方程(5), 抛物面的焦距 $f = \frac{g}{2\omega^2}$.

测得焦距 f 和角速度 ω , 即可得到重力加速度:

$$g = 2\omega^2 f \quad (12)$$

1.3 用旋转液体测量液体黏度

在圆桶形液体容器中, 沿中心放入由张丝悬挂着的圆柱形物体, 圆柱高度为 L , 半径为 R_1 , 外圆桶容器半径为 R_2 , 如图 3 所示.

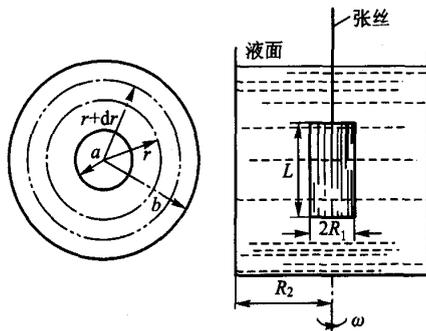


图 3 液体黏度测量原理图

容器以恒定的角速度 ω_0 旋转,在转速较小的情况下,流体会很规则地一层层地转动形成层流,稳定时圆柱形物体静止,角速度为零.设外圆桶容器稳定旋转时,圆柱形物体所承受的阻力矩为 M ,则有

$M =$ 圆柱侧面所受液体的阻力矩 $M_1 +$

圆柱底面所受液体摩擦力矩 M_2 (13)

M_1 和 M_2 的求法如下:

1) 求圆柱形物体侧面所受液体的阻力矩 M_1

设流体为牛顿流体,流动类型为层流.则根据牛顿内摩擦定律,半径为 r 处旋转层流之间的内摩擦力为

$$F = -\eta S \frac{dv}{dr} = -\eta 2\pi r L r \frac{d\omega}{dr} = 2\pi \eta L r^2 \frac{d\omega}{dr}$$

其中 S 是半径为 r 处旋转层流的表面积, v 为该处旋转层流的线速度, ω 为相应的角速度.

在半径为 r 处旋转层流所受的力矩是一常量,设为 M_r ,则有

$$M_r = rF = -2\pi \eta L r^3 \frac{d\omega}{dr}$$

上式可变换为

$$d\omega = -\frac{M_r}{2\pi \eta L} \frac{dr}{r^3}$$

将上式两边积分,并考虑到相关的边界条件,有

$$\int_0^{\omega_0} d\omega = -\frac{M_r}{2\pi \eta L} \int_{R_1}^r \frac{dr}{r^3}$$

上式的解是

$$\omega_0 = \frac{M_r}{4\pi \eta L} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_1^2} \right]$$

或

$$M_r = 4\pi \eta L \omega_0 \frac{R_1^2 r^2}{R_1^2 - r^2} \quad (14)$$

由式(14)可求出圆柱形物体侧面所受的液体阻力矩 M_1 ,即

$$M_1 = M_r \Big|_{r=R_2} = 4\pi \eta L \omega_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}$$

2) 求圆柱底面所受液体摩擦力矩 M_2

系统稳定旋转时,外圆筒以恒定的角速度 ω_0 旋转,圆柱形物体静止,其底面下的液体层角速度均匀变化,即 $d\omega/dz = \omega_0/\Delta z$, Δz 为圆柱底面到外圆桶底面的距离.

底面半径 r 处液体的速度梯度为 $r \frac{d\omega}{dz} = r \frac{\omega_0}{\Delta z}$, 对面积为 $dS = 2\pi r dr$ 的面积元积分,可得圆柱底面所受的内摩擦力矩 M_2 为

$$M_2 = \int_0^{R_2} r \eta dS \cdot r \frac{\omega_0}{\Delta z} = \int_0^{R_2} 2\pi \eta r^3 \frac{\omega_0}{\Delta z} dr$$

因此有

$$M_2 = \frac{\pi \eta R_2^4 \omega_0}{2\Delta z} \quad (15)$$

根据式(13)、(14)、(15),可得圆柱形物体所受液体总的阻力矩 M 为

$$M = M_1 + M_2 = 4\pi \eta L \omega_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} + \frac{\pi \eta R_2^4 \omega_0}{2\Delta z} \quad (16)$$

为了测量液体阻力矩 M ,设悬挂圆柱形物体的张丝切变模量为 G ,张丝半径为 R ,张丝长度为 L' ,则扭转力矩为

$$M' = \frac{\pi G R^4}{2L'} \theta \quad (17)$$

该式表示力矩 M' 与扭转角度 θ 成正比.

在液体旋转系统稳定时,液体产生的阻力矩与悬挂张丝所产生的扭转力矩平衡,使得圆柱形物体达到静止,所以 $M = M'$.

由式(16)、(17)可解出液体黏度作为外圆桶旋转角速度 ω_0 和内圆柱扭转角度 θ 的函数:

$$\eta(\omega_0, \theta) = \frac{G R^4}{2L' \omega_0} \theta \frac{2\Delta z (R_1^2 - R_2^2)}{8L \Delta z R_1^2 R_2^2 + (R_1^2 - R_2^2) R_2^4} \quad (18)$$

2 仪器结构

该仪器主要由以下几部分组成:

1) 带有旋转机构及调速部分的主机

该部分由步进电机带动圆盘旋转,圆盘上可固定放置实验用液体容器,需保证装有液体的容器能平稳地旋转.调速装置实现转速 $0 \sim 150$ 转/min 连续可调,数值由转速表显示.电机有正反转切换开关.

2) 实验用光源

使用光斑小于 1 mm 的半导体激光器作为入射光,激光头固定在支架上,上下左右位置可调.

3) 测量组件部分

标有毫米刻度的垂直支架有一上下可调的水平指示红线,用于测量 Δh .

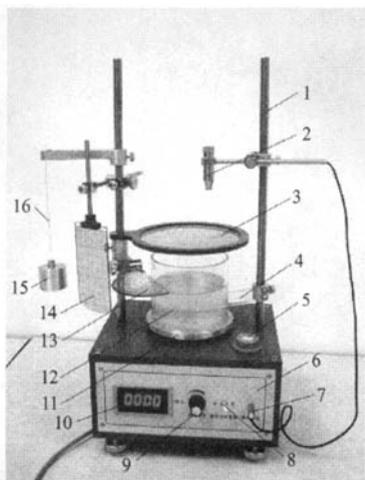
水平放置的毫米刻度坐标透明屏幕,上下位置可调,用来读取数据 d .

沿中心垂直放置的毫米刻度坐标透明屏幕,中心及上下位置可调,用于测量液体凹面的焦距 f .

张丝悬挂的圆柱体上端面有一标记点,固定在

支架上可上下移动和左右转动,实验时沿容器中心线置于液体中,水平放置透明量角器,借助激光光线测量圆柱体偏转角 θ 。

仪器实物见图 4。



1. 带有毫米刻度的支撑杆; 2. 激光器;
3. 毫米刻度水平透明屏幕; 4. 水平标线;
5. 水平仪; 6. 箱体; 7. 激光器电源插孔;
8. 正反转拨动开关; 9. 调速开关;
10. 速度显示窗; 11. 转盘;
12. 圆柱形实验容器; 13. 水平量角器;
14. 毫米刻度垂直透明屏幕;
15. 张丝悬挂圆柱体; 16. 张丝

图 4 旋转液体综合实验仪

3 实验结果

3.1 测量重力加速度 g

1) 方法一

实验测得圆桶容器半径 $R = 4.91 \text{ cm}$, 实验结果见表 1。

表 1

| 转速 $n/(\text{转}\cdot\text{min}^{-1})$ | $\omega^2/\text{rad}^2\cdot\text{s}^{-2}$ | $\Delta h/\text{cm}$ | $g/(\text{cm}\cdot\text{s}^{-2})$ |
|---------------------------------------|---|----------------------|-----------------------------------|
| 110 | 132.68 | 1.70 | 936.08 |
| 115 | 145.02 | 1.80 | 966.28 |
| 120 | 157.90 | 1.90 | 996.75 |
| 125 | 171.34 | 2.10 | 978.54 |
| 130 | 185.32 | 2.20 | 1010.28 |
| 135 | 199.85 | 2.40 | 998.70 |

由上述实验结果可得重力加速度的平均值为 $\bar{g} = 981.11 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$ 。杭州地区重力加速度公认值为 $g = 979.30 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$, 因此实验相对误差 $E = 0.18\%$ 。

2) 方法二

万方数据

实验测得水平放置透明屏幕高度 $H = 13.0 \text{ cm}$, 静止液面高度 $h = 5.5 \text{ cm}$ 。

用自准直法调整激光头位置,使其对准底盘红线(实验容器内径 $R/\sqrt{2}$ 刻线)处,实验结果见表 2。

表 2

| 转速 $n/(\text{转}\cdot\text{min}^{-1})$ | d/mm | $\tan 2\theta$ | θ/rad | $\tan \theta$ | $g/(\text{cm}\cdot\text{s}^{-2})$ |
|---------------------------------------|---------------|----------------|---------------------|---------------|-----------------------------------|
| 40 | 10.5 | 0.14 | 3.985 | 0.069 64 | 872.62 |
| 50 | 15.5 | 0.21 | 5.838 | 0.102 25 | 929.13 |
| 60 | 22.5 | 0.30 | 8.350 | 0.146 78 | 932.04 |
| 70 | 30.0 | 0.40 | 10.901 | 0.192 59 | 966.67 |
| 80 | 40.5 | 0.54 | 14.185 | 0.252 76 | 962.02 |
| 90 | 52.5 | 0.70 | 17.496 | 0.315 22 | 976.30 |

由上述实验结果可得重力加速度的平均值为 $\bar{g} = 939.80 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$, 实验相对误差为 $E = 4.0\%$ 。

3) 方法三

实验结果见表 3。

表 3

| 转速 $n/(\text{转}\cdot\text{min}^{-1})$ | $f_{\text{实}}/\text{cm}$ | $g/(\text{cm}\cdot\text{s}^{-2})$ | $f_{\text{理}}/\text{cm}$ |
|---------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|--------------------------|
| 80 | 6.92 | 971.2 | 7.71 |
| 90 | 5.31 | 943.3 | 6.02 |
| 100 | 4.52 | 991.3 | 4.91 |
| 110 | 3.90 | 1 034.9 | 4.02 |
| 120 | 3.10 | 979.0 | 3.41 |
| 130 | 2.62 | 971.1 | 2.91 |

由上述实验结果可得重力加速度的平均值为 $\bar{g} = 981.8 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$, 实验相对误差为 $E = 0.29\%$ 。

从图 5 还可以看出,理论公式计算所得的转速-焦距关系曲线与实验测得的结果较为吻合,即可证实旋转液体表面确实如凹面镜一样。

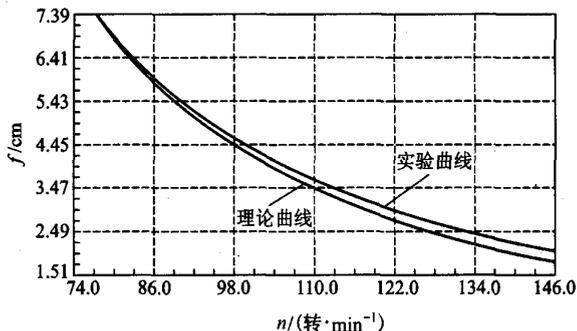


图 5 $n-f$ 关系曲线

3.2 测量液体黏度

实验所用液体为蓖麻油,已知条件为油温 $T = 18\text{ }^{\circ}\text{C}$ 、 $G = 81\text{ GPa}$.实验测得: $R = 0.121\ 25\text{ mm}$, $L' = 30.0\text{ cm}$, $\Delta z = 2.3\text{ cm}$, $L = 3.0\text{ cm}$, $R_1 = 1.5\text{ cm}$, $R_2 = 4.9\text{ cm}$.

将张线悬挂的圆柱体沿实验容器中心置于液体中,完全浸没.仪器设计时使张丝悬挂臂的长度等于支撑杆到容器中心的距离,调整张丝悬挂臂的位置,保证圆柱在正中心.张丝套入水平放置的量角器中心圆孔与量角器圆心一致,激光光线对准圆柱体上端面上的标记,读出量角器上的角度值.打开仪器电源使液体旋转,待稳定后圆柱体达到静止状态,再次将激光对准圆柱体上端面上的标记,读出量角器上的角度值,计算偏转角 θ ,同时测量液体的温度.

实验结果见表4.

表4

| 转速 $n/(\text{转}\cdot\text{min}^{-1})$ | 偏转角 $\theta/(\text{ }^{\circ})$ | $\bar{\theta}/(\text{ }^{\circ})$ | $\eta/\text{Pa}\cdot\text{s}$ |
|---------------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| 39 | 329 | 327 | 1.318 37 |
| | 326 | | |
| | 326 | | |
| 46 | 377 | 376 | 1.286 38 |
| | 376 | | |
| | 376 | | |
| 50 | 421 | 417 | 1.311 36 |
| | 417 | | |
| | 413 | | |

由上述实验结果可得黏度平均值 $\bar{\eta} = 1.305\ 37\text{ Pa}\cdot\text{s}$.根据经验公式^[1] $\eta = 5.75 e^{-0.083\ 7t}\text{ Pa}\cdot\text{s}$,得 $\eta = 1.274\ 55\text{ Pa}\cdot\text{s}$.实验相对误差为 $E = 2.4\%$.

通过以上实验数据可以看出,旋转液体综合实验可进行多个参数的测量,特别是重力加速度可用3种方法测量,既增加了实验内容,又提供了实验数据的分析、比较和探讨.各实验的重复性较强,测量精度也满足实验教学要求.实验时需自行组装和调整仪器,因此可提高实验者的动手能力和实验教学效果.

参考文献:

- [1] 武瑞兰,田静.蓖麻油粘滞系数随温度变化的经验公式[J].山东工业大学学报,1998,28(1):94-95.
- [2] 林佩芬,周炎辉.旋转圆筒法测粘滞系数的计算公式讨论[J].工科物理,1996,4:23-25.
- [3] 沈易,陆申龙.第32届国际物理奥林匹克竞赛力学与光学综合实验题解答与分析[J].物理实验,2001,21(11):26-31.
- [4] 许定生.液体粘滞系数的准确测量和计算[J].物理实验,1999,19(1):9-11.
- [5] 董艳红,许震天,卢颖.牛顿粘滞定律中粘滞系数两种推导方法[J].佳木斯大学学报,2003,21(3):323-325.
- [6] 包奔靓,黄吉,陆申龙.新型旋转液体实验——介绍一个研究性物理实验[J].大学物理,2003,22(2):27-30.

A design of the integrated experiment on rotating liquid

CHEN Hong-yu

(Physics Experimentation Education Center, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: An integrated experiment design scheme is presented to measure the gravity acceleration and the viscosity coefficient using a rotating liquid optics method. This experiment has been implemented in college education as an open experiment.

Key words: rotating liquid; gravity acceleration; viscosity coefficient; integrated experiment